

## BÀI TẬP CHƯƠNG I

### §1. Chia hết và chia có dư

- Chứng minh rằng:
  - $1997^{1999} - 1997^{1998} : 4$
  - $1997^{1998} - 1998^{1999} \not\vdots 4$ .
- Chứng minh rằng trong hai số chẵn liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho 4.
- Chứng minh rằng nếu  $m - n$  chia hết  $mp + nq$  thì  $m - n$  chia hết  $mq + np$  ( $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ ).
- Trong định lí về phép chia có dư  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < b$ , cho biết  $a$  và  $q$ , hãy tìm  $b$  và  $r$  trong các trường hợp sau:
  - $a = 133, q = 11$ .
  - $a = 350, q = 47$ .
- Chứng minh rằng nếu  $(a^3 + b^3 + c^3) : 9$  thì một trong ba số  $a, b, c$  chia hết cho 3.
- Tổng của  $n$  số nguyên liên tiếp có chia hết cho  $n$  hay không ( $n \geq 1$ )? Tại sao?
- Chứng minh rằng không có cặp số nguyên  $x, y$  nào thỏa mãn đẳng thức:  $x^2 + 2 = 5y$ .
- Tìm các số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn đồng thời các đẳng thức: 
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x^2 - xy + x - 2z = 1 \end{cases}$$

### §2. Ước chung lớn nhất

- Giả sử  $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \leq b \leq c, b = aq_1 + r_1, c = aq_2 + r_2$ .  
Chứng minh rằng:  $\text{ƯCLN}(a, b, c) = \text{ƯCLN}(a, r_1, r_2)$ . Áp dụng tìm  $\text{ƯCLN}(1248, 1794, 2730)$ .
- Chứng minh rằng nếu  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$  thì  $\text{ƯCLN}(a - b, ab) = 1$ ;  $\text{ƯCLN}(2a + b, a(a + b)) = 1$ .
- Tìm các cặp số nguyên dương  $a, b$  thỏa mãn một trong các điều kiện:
  - $a + b = 432$  và  $\text{ƯCLN}(a, b) = 36$
  - $ab = 8400$  và  $\text{ƯCLN}(a, b) = 20$ .
- Chứng minh rằng  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$ , với:
  - $a = 21m + 4, b = 14m + 3$
  - $a = m^3 + 2m, b = m^4 + 3m^2 + 1$
  - $a = m^2n + 2m, b = mn + 1$
 ở đó  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
- Cho  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$  và  $n$  là ước chung của  $a - b$  và  $ac - bd$ . Chứng minh rằng  $n$  là ước của  $c - d$ .
- a) Cho  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1, a > 1, b > 1$ . Chứng minh rằng có cặp số nguyên  $(m, n)$  duy nhất sao cho  $am - bn = 1, 0 < m, 0 \leq n < a$ .  
b) Cho  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1, b > a > 0, b \geq k \geq 1$ . Chứng minh rằng có cặp số nguyên  $(m, n)$  duy nhất thỏa mãn điều kiện  $am - bn = k, 0 \leq m < b, -1 \leq n < a$ .
- Chứng minh rằng nếu  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$  thì
  - $\text{ƯCLN}(a + b, a^2 + b^2 - ab)$  bằng 1 hoặc 3
  - $\text{ƯCLN}(11a + 2b, 18a + 5b)$  bằng 1 hoặc 19.
- Cho  $a, m, n$  là những số nguyên dương,  $a > 1$  và  $(m, n) = 1$ . Chứng minh rằng:
 
$$(a - 1)(a^m - 1) : (a^m - 1)(a^n - 1).$$
- Chứng minh rằng các số  $2^p - 1$  và  $2^q - 1$  nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi  $p$  và  $q$  nguyên tố cùng nhau.

### §3. Bội chung nhỏ nhất

- Tìm BCNN  $(2^n - 1, 2^n + 1), n \in \mathbb{N}$ ;
- Tìm bội chung nhỏ nhất của ba số nguyên liên tiếp.

20. Tìm các cặp số tự nhiên  $a$  và  $b$  sao cho  $ƯCLN(a, b) = 15$ ,  $BCNN(a, b) = 2835$ .
21. Tìm các cặp số tự nhiên  $a$  và  $b$  biết tổng bình phương của chúng bằng 468 và tổng ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của chúng bằng 42.
22. Chứng minh rằng với  $m \in \mathbb{Z}$ , ta có:
- a)  $m^5 - m : 30$
- b)  $m^5 - 5m^3 + 4m : 120$ .
23. Chứng minh rằng với  $m$  là một số nguyên lẻ, ta có:
- a)  $m^3 + 3m^2 - m - 3 : 48$
- b)  $m^{12} - m^8 - m^4 + 1 : 512$ .
24. Đặt  $BCNN(a, b) = m$ . Chứng minh rằng:  $ƯCLN(a + b, m) = ƯCLN(a, b)$ .
25. Cho  $M$  là bội chung của  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , trong đó  $a_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ . Ta đặt

$$M_i = \frac{M}{a_i} \text{ và } D = ƯCLN(M_1, M_2, \dots, M_n).$$

$$\text{Chứng minh rằng: } BCNN(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{M}{D}.$$

26. Cho  $k$  và  $n$  là hai số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng:
- a)  $(n!)^k$  và  $(k!)^n$  là ước của  $(nk)!$
- b)  $BCNN((n!)^k, (k!)^n)$  là ước của  $(nk)!$

#### §4. Số nguyên tố

27. Chứng minh rằng với  $n$  là một số tự nhiên lớn hơn 1, số sau đây là những hợp số:  $n^4 + 4$
28. Chứng minh rằng với  $p$  là một số nguyên tố lớn hơn 3 ta có  $p^2 - 1$  chia hết cho 24.
29. Tìm số nguyên tố  $p$  sao cho  $p + 4$  và  $p + 8$  cũng là những số nguyên tố.
30. Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 hoặc là 1 hoặc là một số nguyên tố.
31. Chứng minh rằng tích của những số dạng  $4m + 1$  lại là một số có dạng ấy. Từ kết quả này suy ra rằng có vô số số nguyên tố dạng  $4m + 1$ .
- Giải bài toán tương tự cho số nguyên tố có dạng  $6m + 5$ .
32. Chứng minh rằng với  $m > 2$  giữa  $m$  và  $m!$  có ít nhất một số nguyên tố. Từ đó suy ra rằng có vô số số nguyên tố.
33. Cho hai số tự nhiên  $m \neq n$ . Chứng minh rằng  $2^{2^m} + 1$  và  $2^{2^n} + 1$  nguyên tố cùng nhau. Từ đó suy ra tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.
34. Tìm các số nguyên tố  $x, y, z$  thỏa mãn phương trình:  $x^y + 1 = z$ .
35. Chứng minh rằng nếu tổng của ba số chính phương là một số chính phương thì ít nhất hai trong ba số này là chẵn.
36. Chứng minh rằng nếu  $a^n + 1$  là số nguyên tố với  $a > 1$  thì  $n = 2^k$ .

#### §5. Phương trình Đi-ô-phăng $ax + by = c$

37. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:
- a)  $83x - 79y = 105$
- b)  $114x - 41y = 5$ .
38. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:
- a)  $2x + 3y - 5z = 15$
- b)  $3x + 4y + 5z = 25$ .
39. Giải và biện luận theo số nguyên  $m$  các phương trình sau với  $x, y \in \mathbb{Z}$ :
- a)  $6x - 11y = m + 2$
- b)  $3x + my = 3$
- c)  $3x + (2m - 1)y = m + 1$
40. Tìm nghiệm nguyên của các hệ phương trình sau:

a) 
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 2x - 5y - 7z = -7 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 2 \\ 3x - 5y + 2z = 3 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 5x - 5y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

41. a) Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $\frac{5x+2}{7}$  là một số nguyên.

b) Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $\frac{5x-1}{7}$  và  $\frac{7x-1}{5}$  đều là những số nguyên.

42. Hãy tìm tất cả các số trong hệ thập phân có dạng  $\overline{xy2}$  chia hết cho 28.

43. Tìm các số nguyên mà khi chia chúng lần lượt cho 19 và 11 có dư tương ứng là 4 và 1.

44. Một bài toán dân gian:

“ Mai em đi chợ phiên  
Anh gửi một tiền  
Mua cam cùng quýt  
Không nhiều thì ít  
Mua lấy một trăm  
Cam ba đồng một  
Quýt một đồng năm  
Thanh yên tươi tốt  
Năm đồng một trái”

Hỏi mỗi thứ mua được mấy trái? (Biết rằng một tiền bằng 60 đồng).